www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

E P F

3 bis rue Lakanal
92330 SCEAUX
(1) 46 60 33 31

CONCOURS D'ENTRÉE du 24 MAI 1989

ÉPREUVE de MATHEMATIQUES

Durée 4 heures - COEFFICIENT 5

Sur les 4 exercices proposés, 2 seulement sont à traiter au choix de la candidate.
Attention : Sans indication de votre part, seuls les 2 premiers exercices traités seront corrigés
Dans l'application du barème, on tiendra compte de la clarté et la précision des figures, des explications données et la candidate devra donner les énoncés complets des théorèmes qu'elle sera amenée à utiliser.

Exercice 1

On considère l'équation : (1) $2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2 = 0$ où l'inconnue z est un nombre complexe.

1° a) Montrer que, si z_0 est solution de (1), alors $\overline{z_0}$ est aussi solution.

b) Montrer que, si z_0 est solution de (1), alors $\frac{1}{z0}$ est aussi solution.

c) En déduire les expressions des solutions de (1) en fonction de l'une d'entre elles notée z_0.

2° a) Déterminer une solution de (1) de la forme a + i, où a est un nombre réel et i le complexe de module 1, et dont un argument est $\pi/2$.

b) Calculer les solutions de (1).

c) On appelle z_0 , z_1 , z_2 et z_3 les solutions de (1).

Calculer $(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$

et écrire le premier membre de (1) sous la forme d'un produit de deux polynômes du second dégré à coefficients réels.

Exercice 2 On considère un triangle ABC.

1° a) Construire les points I barycentre de (A,3) et (C,1),
J barycentre de (A,1) et (B,3),
et K barycentre de (C,1) et (B,-9).

b) Montrer que B est le barycentre de (C,1) et (K,8).

2° a) Montrer que J est le barycentre de (A,3), (C,1) et (K,8).

b) Montrer que J est le barycentre de (I,1) et (K,2). Que peut-on en déduire pour les points I, J et K ?

3° Soit D le barycentre de (C,1) et (K,2), et E le milieu de [AC].

a) Montrer que IJDE est un parallélogramme.

b) Soit O le centre du parallélogramme IJDE ; montrer que la droite (CO) coupe le segment [AB] en son milieu.

Exercice 3

Dans un plan $\mathcal{P}$, on considère une droite $\mathcal{D}$ et un point S non situé sur $\mathcal{D}$.
Sur la droite Δ perpendiculaire en S au plan $\mathcal{P}$, on considère un point A fixe distinct de S.
B et C sont deux points variables de $\mathcal{D}$ tels que les droites (SB) et (SC) soient perpendiculaires.

1° Démontrer que la somme $AB^2 + AC^2 - BC^2$ est constante.

2° Soit H la projection orthogonale de S sur le plan (ABC). Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC (on pourra utiliser le produit scalaire pour démontrer l'orthogonalité des droites).

3° Dans le triangle ABC, les hauteurs issues de A, B et C coupent les côtés opposés respectivement en A_1, B_1 et C_1.

Montrer que A_1 est un point fixe.

Montrer que, dans le plan (ABC), B_1 et C_1 appartiennent au cercle Γ de diamètre [AH], privé des points A et H.
Réciproquement, montrer que, quel que soit le point B_0 de Γ, on peut définir des points B et C sur $\mathcal{D}$ tels que (BB_0) soit la hauteur issue de B, et que les droites (SB) et (SC) soient perpendiculaires.

T.S.V.P.

page 270 ECOLE POLYTECHNIQUE FEMININE 1989 1

Exercice 4

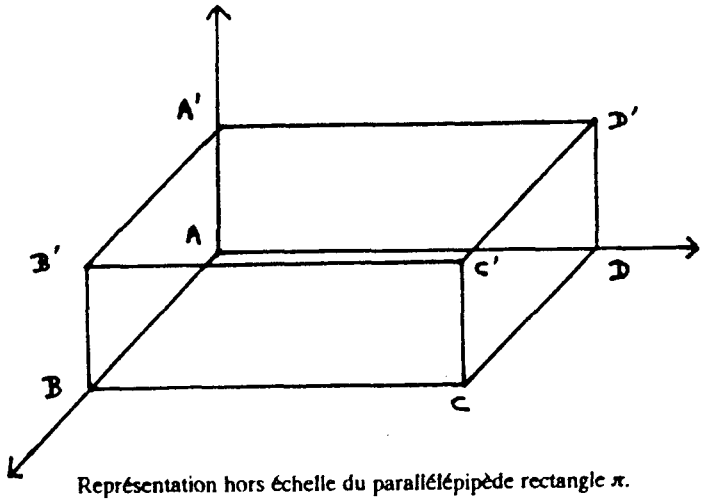
ATTENTION : si vous choisissez de traiter l'exercice 4, vous devez obligatoirement utiliser pour les différentes représentations une feuille de papier millimétré.
N'oubliez pas de la rendre avec votre copie et d'inscrire votre numéro de candidate.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: les points B, D, A' ont pour coordonnées respectives (3,0,0) ; (0,6,0) ; (0,0,2). On considère le parallélépipède rectangle (π) dont les arêtes [AA'], [BB'], [CC'], [DD'] sont parallèles et les points E(1,0,0), F(3,6,1) et G(0,2,2).

1° Calculer les coordonnées du point H d'intersection de la droite (FG) avec le plan (ABC).

2° Représenter les points E, F, G, H sur la figure. Mettre en évidence, sans calcul supplémentaire, la section du plan (EFG) avec le parallélépipède.

3° Donner les coordonnées des points d'intersection du plan (EFG) avec toutes les droites, supports des arêtes du parallélépipède.



Représentation hors échelle du parallélépipède rectangle π.

PROBLEME

N.B. Les parties D et E peuvent être partiellement traitées, même si les valeurs approchées n'ont pas été déterminées avec la précision demandée dans les parties B et C.

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x} - x$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 5 cm).

PARTIE A

1° Etudier la fonction f : limites en $+\infty$ et $-\infty$, sens de variation.
2° Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions α et β, et que ces solutions vérifient :

$$-1 \leq \beta \leq -\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$$

PARTIE B

Dans cette partie, on calcule une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

1° On pose $g(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$; x appartient à l'intervalle $[0, +\infty[$
Etudier le sens de variation de la fonction g.
Montrer que l'image par g de l'intervalle [1/2,1] est inclus dans l'intervalle [1/2,1].
Majorer $|g'(x)|$ pour x élément de [1/2,1].

2° On définit la suite u par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que tous les termes de la suite u appartiennent à l'intervalle [1/2,1].
b) Montrer, en appliquant l'inégalité des accroissements finis, que

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha|$$

puis que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout $n \geq 0$

En déduire que la suite u converge vers α.

c) Montrer que α est toujours compris entre deux termes successifs de la suite.
Calculer les premiers termes à l'aide de la machine. En déduire un encadrement de α à 0,01 près.

T.S.V.P.

ECOLE POLYTECHNIQUE FEMININE

PARTIE C

Dans cette partie, on calcule une valeur approchée de β à 10^{-2} près.

Montrer que $\begin{cases} f(\beta) = 0 \\ \beta < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2}\ln(2e^{-\beta} - \beta) \\ \beta < 0 \end{cases}$

1° On pose $h(x) = -\frac{1}{2}\ln(2e^{-x} - x)$; x appartient à l'intervalle $]-\infty,0]$

Etudier le sens de variation de la fonction h.

2° On définit la suite v par $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = h(v_n) \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

a) Montrer que la suite v est croissante et majorée par β.
Démontrer que la suite v converge vers β.

b) On admet que $|h'(x)| \leq \frac{3}{5}$ sur $[-1, -\frac{1}{2}]$

Démontrer que $|\beta - v_n| \leq \frac{3}{5}|\beta - v_{n-1}|$

puis que $|\beta - v_n| \leq \frac{1}{2}(\frac{3}{5})^n$ pour tout $n \geq 0$

En déduire un entier p tel que, pour $n > p$, on ait

$$|\beta - v_n| < 10^{-2}$$

Calculer une valeur approchée de β à 0,01 près.

PARTIE D

1° Tracer la courbe C après avoir étudié sa position par rapport à la droite d'équation $y = -x$

2° Calculer, en unités d'aire, l'aire S de la partie de plan comprise entre C et x'x.

PARTIE E

1° On considère la fonction φ définie par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = e^{3}(x - \beta) & x < \beta \\ \varphi(x) = 1 & \beta \leq x \leq \alpha \\ \varphi(x) = e^{\alpha} - x & \alpha < x \end{cases}$$

Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

2° On définit alors $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t).\varphi(t).dt$

a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer la dérivée F '(x) pour tout x de $\mathbb{R}$.
Donner le sens de variation de F.

c) Calculer $F(\alpha)$ et $F(\beta)$.
Quel est le signe de F(x) lorsque $x > \alpha$?
Que peut-on conjecturer quant au signe de F(x) pour $x < \beta$?

d) Donner les expressions de F(x) quand $x > \alpha$ et quand $x < \beta$.

En déduire $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} F(x)$

Compléter le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail